DEVOIR DE SYNTHESE N°3 4

ème Math 1+2 Durée :4h

EXERCICE N°1

On considère un carré ABCD de coté d .
On pose I = A $*$ B et J le symétrique de I par rapport à A .

1/ Soit l'ellipse (E) de foyers I et J et tangente à la droite (BD).
   a- Construire le point de contact M de le tangente (BD) avec l'ellipse (E).
   b- Construire les sommets de (E). (on désignera par S et S' les sommets du grand axe)

2/ Soit (P) la parabole de foyer I et de directrice la droite (BC).
   Déterminer les tangentes communes à la parabole (P) et à l'ellipse (E).

3/ Soit (H) l'hyperbole de sommets I et J et de foyers S et S'.
   a- Construire les asymptotes de (H).
   b- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB}$.
   Ecrire les équations réduites de (E) et (H).
   c- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (E) et (H).

EXERCICE N°2

On dispose d'une urne U_1 contenant 3 boules blanches et 2 boules noires , d'une urne U_2 contenant 3 boules noires et 2 boules blanches et d'un dé parfait dont les faces sont numérotées 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1.
On lance une fois le dé :

- Si on obtient le nombre 0 alors on tire successivement et avec remise deux boules de U_1.
- Si non on tire successivement et sans remise deux boules de U_2.

1/ Calculer la probabilité des événements suivants :
   E : obtenir deux boules de même couleur.
   F : obtenir exactement une boule noire.

2/ Soit X l'alea numérique qui à chaque épreuve associe le nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de probabilité de X.

3/ On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans leurs urnes.
   Soit Y l'alea numérique indiquant le nombre de fois ou l'on obtient deux boules blanches.
   Déterminer la loi de probabilité de Y.

4/ De l'une des deux urnes choisies au hasard , on tire simultanément deux boules.
   Sachant que les deux boules tirées sont noires , quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de U_1 .

PROBLEME

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie pour tout $x \in \left]-1, +\infty\right[$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}.$$

Soit (C_n) la courbe de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

A

1/ a) Etudier les variations de f_1 et de f_2.

b) Etudier la position relative de (C_1) et (C_2) . Construire (C_1) et (C_2).

c) Calculer en cm² , l'aire de la partie du plan limitée par (C_1) , (C_2) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

2/ Soit U_n la valeur minimale de f_n sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

a) Montrer que $U_n = f_n(n-1)$

b) Pour $x \geq 0$ comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Log}(U_n)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

B

Pour tout $x \in]\frac{1}{e}, +\infty[$ on pose $F(x) = \int_0^{\text{Log}\,x} f_2(t)\,dt$.

1/ Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x \in]\frac{1}{e}, +\infty[$.

2/ Montrer que pour tout $x \in]\frac{1}{e}, 1]$ $\quad F(x) \leq x\left(1 - \frac{1}{1+\text{Log}\,x}\right)$

En déduire $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{e})^+} F(x)$.

3/ a) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que :

$$\text{Pour tout } x > \frac{1}{e} \;;\; F(x) = \frac{x}{(1+\text{Log}\,x)^2} - 1 + 2\int_0^{\text{Log}\,x} f_3(t)\,dt$$

b) En déduire que pour tout $x \geq 1$; $F(x) \geq \frac{x}{(1+\text{Log}\,x)^2} - 1$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4/ Montrer que F est une bijection de $]\frac{1}{e}, +\infty[$ sur IR .

C

Pour tout $n \in IN^*$ on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2/ Montrer que pour tout $n \in IN \setminus \{0, 1\}$ on a :

$$\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Quelle est la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

3/ a) Exprimer $f'_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$ et de $f_{n+1}(x)$.

b) En déduire une relation entre I_n et I_{n+1}.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n I_{n+1} = 1$.

4/ Soit $J_n = n I_n$ pour tout $n \in IN^*$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.